Jana Christl, Erika Verl, Melanie Besca, Kristin Krajewski & Marco Ennemoser

Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in Förderschulen Lernen, nicht-gymnasialer und gymnasialer Sekundarstufe von der 5. bis 9. Klasse – Eine Längsschnittstudie (EnDiMath)

Zusammenfassung

Im vorgestellten Projekt EnDiMath[1] wurden die Potenziale einer basiskompetenzorientierten Mathematikdiagnostik für die Sekundarstufe untersucht. Im Rahmen einer Längsschnittstudie wurden 1 253 Schüler:innen aus den verschiedenen Regelschulen der Sekundarstufe (n = 1 142) sowie weitere 111 Schüler:innen aus Förderschulen mit dem Schwerpunkt Lernen rekrutiert, die zu Beginn der Studie entweder die 5. Klasse (Kohorte 1) oder die 7. Klasse (Kohorte 2) besuchten. Im Anschluss wurde über einen Zeitraum von zwei Jahren die weitere mathematische Kompetenzentwicklung der beiden Kohorten erfasst. Hierzu wurde die Testbatterie mathematischer Basiskompetenzen (MBK 4–13+) eingesetzt, die mit dem Zahl-Größen-Verständnis und dem Konventions- und Regelwissen (bzw. der Beherrschung der mathematischen Notation) zwei zentrale Säulen der mathematischen Kompetenzentwicklung in der Sekundarstufe erfasst. Zur Ermittlung der curricularen Mathematikleistungen kamen darüber hinaus die Deutschen Mathematiktests (DEMAT) zum Einsatz. Die Ergebnisse zeigen, dass sich in der Sekundarstufe mit dem Zahl-Größen-Verständnis auch solche mathematischen Basiskompetenzen noch substanziell weiterentwickeln, die eigentlich weit unterhalb der jeweils aktuellen curricularen Anforderungen liegen. Dabei zeigen sich über alle Klassenstufen hinweg substanzielle Unterschiede zwischen den Schulformen. Dies gilt auch für die Entwicklung des Konventions- und Regelwissens, für das längsschnittlich ein Matthäuseffekt zugunsten der Gymnasiast:innen registriert wurde. Bemerkenswert sind die engen korrelativen Beziehungen zwischen den erfassten Basiskompetenzen und den curricularen DEMAT-Testleistungen, die darauf hindeuten, dass sich bessere Basiskompetenzen zu einem großen Teil auch in besseren curricularen Mathematikleistungen widerspiegeln. Die Befunde unterstreichen die Potenziale einer basiskompetenzorientierten Mathematikdiagnostik in der Sekundarstufe, die über die gesamte Sekundarstufe und alle Schulformen hinweg, bis in den Leistungsbereich von Förderschulen mit dem Schwerpunkt Lernen, eine gute und förderrelevante Differenzierung mathematischer Kompetenzen erlaubt.

Schlüsselworte: Mathematische Entwicklung, Zahl-Größen-Verständnis, Konventions- und Regelwissen, inklusive Diagnostik, Förderdiagnostik, Rechenschwäche

Abstract

The presented project EnDiMath investigated the potential of a diagnostic tool for the assessment of basic numerical skills for secondary education. In a longitudinal study, 1 253 students from various mainstream secondary schools (n = 1 142) and an additional 111 students from special education schools were recruited. These students were either in the 5th grade (Cohort 1) or the 7th grade (Cohort 2) at the beginning of the study. Over a period of

1 Dieses Projekt wurde aus Mitteln des Bundesministeriums für Bildung und Forschung unter dem (BMBF) Förderkennzeichen 01NV2103 gefördert. Die Verantwortung für den Inhalt dieser Veröffentlichung liegt bei den Autor:innen.

two years, the further development of mathematical competencies in both cohorts was monitored. The test battery for basic mathematical competencies (MBK 4–13+) was used, capturing two central pillars of mathematical competency development in secondary education: quantity-number competencies (QNC) and mathematical notation fluency.

Additionally, the German Mathematics Tests (DEMAT) were employed to assess curricular mathematics performance. The results show that in secondary education, quantity-number competencies, which are significantly below the current curricular demands, continue to develop substantially. Significant differences between school types are evident across all grade levels. This also applies to the development of mathematical notation fluency, where a longitudinal Matthew effect favoring students from academic track schools was observed. Remarkably, there are strong correlations between the assessed basic competencies and the curricular DEMAT test performances, indicating that better basic mathematical skills are largely reflected in better curricular mathematics performance.

The findings underscore the potential of a diagnostic approach in secondary education that focuses on basic mathematical competencies, allowing for a meaningful and supportive differentiation of mathematical competencies throughout the entire secondary school period and across all school types, including children with learning disabilities.
Keywords: Mathematical development, quantity-number competencies, knowledge of mathematical conventions and rules, inclusive diagnostics, math difficulties

1. Vorstellung des Projekts

1.1 Theoretischer Hintergrund

Mathematische Kompetenz ist eine bedeutsame Schlüsselkompetenz für die Teilhabe am gesellschaftlichen Leben. Um deren Entwicklung optimal fördern zu können, sind diagnostische Informationen über den individuellen Entwicklungsstand von zentraler Bedeutung. Da im Mathematikunterricht über die gesamte Schullaufbahn hinweg bis zur 13. Klassenstufe kontinuierlich neue Lehrplaninhalte hinzukommen, die zudem über verschiedene Schulformen und Bundesländer variieren, stellt die fundierte Diagnostik mathematischer Kompetenzen insbesondere in der Sekundarstufe eine gewaltige Herausforderung dar. Um das enorme Kompetenzspektrum lückenlos abzudecken, ist im Grunde ein Arsenal an diagnostischen Verfahren erforderlich, das für die (Regelschul-)Lehrkraft in der Praxis zweifellos eine Überforderung darstellen dürfte. Eine mögliche Lösung für diese Herausforderung könnte darin bestehen, den Fokus weniger auf curriculare Anforderungen zu legen, sondern stattdessen mathematische Basiskompetenzen zu erfassen, die die Voraussetzung dafür darstellen, dass ein:e Schüler:in überhaupt vom Mathematikunterricht profitieren kann. Die Vorteile einer basiskompetenzorientierten Diagnostik liegen darin, dass es möglich ist, mit einem einzigen Testverfahren zu arbeiten, das erstens im gesamten Altersspektrum der Sekundarstufe und in allen Schulformen eingesetzt werden kann, zweitens valide die schulischen Mathematikleistungen vorhersagt, drittens ohne großen Qualifizierungsaufwand im schulischen Setting einsetzbar ist und viertens Informationen über Kompetenzentwicklungen liefern kann, um ggf. bisherige Förderbemühungen entsprechend anpassen zu können.

Relevanz mathematischer Basiskompetenzen vom Kindergarten bis in die Sekundarstufe. Der Begriff *mathematische Basiskompetenzen* wird in der Literatur als Sammelbegriff für basale Voraussetzungen verwendet, die ein Kind mitbringen muss, um für die Anforderungen im Mathematikunterricht hinreichend gewappnet zu sein (Ennemoser & Krajewski, 2013). Während der herausragende prognostische Wert dieser Basiskompetenzen im Kindergarten- und Einschulungsalter sowie diesbezügliche Defizite bei rechenschwachen Grundschulkindern empirisch gut belegt sind (Gaupp et al., 2004; Jordan et al., 2012; Krajewski, 2003; Krajewski & Schneider, 2009; Passolunghi et al., 2007; Watts et al., 2014), beschäftigen sich bislang nur wenige Studien explizit mit der Entwicklung und Bedeutung der oben beschriebenen Basiskompetenzen im Sekundarstufenbereich. Zwar wird die Bedeutung von „mathematischen Basiskompetenzen" auch für die Sekundarstufe diskutiert, allerdings liegen den betreffenden Arbeiten gänzlich andere Auffassungen davon zugrunde, was unter diesem Begriff zu verstehen ist. So fassen etwa Drüke-Noe et al. (2011, S. 8) hierunter solche Kompetenzen, über die „Schülerinnen und Schüler aller Bildungsgänge am Ende der Pflichtschulzeit mindestens und dauerhaft verfügen müssen". Die Relevanz von Basiskompetenzen im Sinne der oben beschriebenen – noch deutlich basaleren – Unterrichtsvoraussetzungen wird am ehesten im Zusammenhang mit Rechenstörungen diskutiert (Moser Opitz, 2005). In drei an Regelschulen durchgeführten Studien von Krajewski und Ennemoser (2010), Ennemoser et al. (2011) sowie Ennemoser und Krajewski (2024) konnte jedoch gezeigt werden, dass die geschilderten Basiskompetenzen – in einem höheren Zahlenraum – nicht nur im Kontext Lernstörungen eine Rolle spielen, sondern dass diese noch von der 5. bis zur 13. Klassenstufe und über alle Regelschulformen hinweg systematischen Entwicklungstrends unterliegen und sogar teilweise im Sinne eines Matthäuseffektes immer weiter auseinanderdriften. Letzteres gilt für das so genannte Konventions- und Regelwissen (bzw. die Beherrschung der mathematischen Notation), das Ennemoser et al. (2011) im Entwicklungsverlauf als zusätzliche Facette mathematischer Basiskompetenzen heranziehen. Die erfassten Basiskompetenzen waren selbst am Ende der 9. Klasse noch eng mit den Leistungen in einem curricular validen Mathematiktest assoziiert und klärten hier 67 % Varianz auf.

Die Befunde deuten darauf hin, dass Annahmen zur frühen mathematischen Kompetenzentwicklung durchaus auf den Sekundarstufenbereich übertragbar sind. Auch hier lassen sich – lediglich für höhere Zahlenräume – Basiskompetenzen definieren, die einerseits weit unterhalb der curricularen Anforderungen liegen, die aber dennoch außerordentlich eng mit den Leistungen in curricular validen Mathematiktests assoziiert sind. Dies deckt sich mit der Annahme, dass zahlreiche Probleme im Mathematikunterricht der Sekundarstufe auf nicht erworbene oder unzureichend gefestigte Inhalte des Mathematikunterrichts in der Grundschule zurückgeführt werden können (Wartha, 2009). Da für den Sekundarstufenbereich bisher lediglich Querschnittstudien vorliegen, deuten die verfügbaren Studien zwar auf durchschnittliche Kompetenzzugewinne über die Klassenstufen hinweg hin. Sie ermöglichen jedoch keine Aussagen über individuelle Entwicklungsverläufe. Zudem liegen aus den

bisherigen Querschnittsstudien keine vergleichenden Ergebnisse zu Schüler:innen der Förderschule Lernen vor.

Basiskompetenzorientierte Diagnostik ermöglicht Vergleichbarkeit von der Förderschule Lernen bis zur gymnasialen Oberstufe. Die bisherigen Befunde legen eine basiskompetenzorientierte Sichtweise auch für den Sekundarstufenbereich nahe. Die Erfassung mathematischer Basiskompetenzen scheint im Altersbereich von drei Jahren bis zur 13. Klassenstufe geeignet, um Schüler:innen mit eher schwach ausgeprägten bis hin zu starken mathematischen Kompetenzen zu differenzieren – ungeachtet der bis dahin rezipierten curricularen Inhalte. Für den gesamten Bereich der Sekundarstufe kann hierzu auf ein empirisch mit mehr als 10 000 Schüler:innen bewährtes Verfahren zurückgegriffen werden (MBK 4–13+; Ennemoser & Krajewski, 2024), dessen Validität allerdings für Schüler:innen der Förderschule Lernen bisher noch nicht erprobt war.

1.2 Spezifisches Thema des Projekts

Das Projekt *Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe (EnDiMath)* zielt darauf ab, die Potenziale einer solchen Diagnostik für den Einsatz im Sekundarstufenbereich zu evaluieren. Gegenüber einer rein curricular orientierten Diagnostik wird eine ganze Reihe von Vorteilen erwartet. Erstens macht es ein entwicklungsorientierter Ansatz möglich, mathematische Kompetenzen mit einem einzigen Verfahren zu erheben – unabhängig von curricularen Inhalten, der Klassenstufe und der Schulform. Für den Einsatz in der Praxis stellt dies in vielerlei Hinsicht eine enorme Erleichterung dar. Zweitens liefert ein solcher Ansatz wertvolle Informationen für den individuellen Zuschnitt notwendiger Fördermaßnahmen, da größere Schwierigkeiten in Mathematik in aller Regel auf Problemen basieren, die deutlich unterhalb des aktuellen Lehrplanstoffes angesiedelt sind. Drittens bietet er die Möglichkeit, individuelle Entwicklungsverläufe über längere Zeiträume zu dokumentieren, was unter anderem wichtig ist, um den Erfolg pädagogischer Maßnahmen zu evaluieren und ggf. notwendige Anpassungen vorzunehmen. Viertens lässt sich eine basiskompetenzorientierte Diagnostik im Hinblick auf Einarbeitungsaufwand, Durchführung und Auswertung sehr ökonomisch gestalten, sodass sie von Lehrkräften selbstständig genutzt werden kann.

1.3 Zielsetzung in Bezug auf Diagnostik in der inklusiven Bildung

Auch unter dem Gesichtspunkt der inklusiven Bildung birgt eine basiskompetenzorientierte Diagnostik besondere Potenziale. Daher lag ein zusätzlicher Fokus der Studie auf Schüler:innen mit sonderpädagogischem Unterstützungsbedarf im Schwerpunkt Lernen (SUB Lernen). Diese werden in Baden-Württemberg entweder in sogenannten Sonderpädagogischen Bildungs- und Beratungszentren mit Förderschwerpunkt Lernen (SBBZ Lernen), die hier aus Gründen der Vereinfachung als

Förderschulen Lernen bezeichnet werden, oder inklusiv an Regelschulen beschult. Ein Anspruch auf sonderpädagogische Unterstützung besteht, wenn individuelle Leistungsrückstände im schulischen Lernen im Vergleich zu den Anforderungen der Bildungsaltersnorm mindestens zwei Schuljahre betragen und über mehrere Jahre persistieren. Eine basiskompetenzorientierte Diagnostik erlaubt auch in unteren Leistungsbereichen eine gute Differenzierung und liefert somit auch für diese Schülergruppe besonders förderrelevante Informationen.

Hypothesen:

1. *Entwicklungsverläufe*: Es wurde angenommen, dass im Untersuchungszeitraum in beiden Kohorten und über alle Schulformen hinweg signifikante Zugewinne in der Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen zu verzeichnen sind.
2. *Validität mathematischer Basiskompetenzen als Indikator für curriculare Leistungen.* Es wurde erwartet, dass der enge Zusammenhang zwischen mathematischen Basiskompetenzen und curricularen Mathematikleistungen im Verlauf der Sekundarstufe nicht nur für alle Regelschularten repliziert werden kann, sondern sich auch für Schüler:innen der Förderschule Lernen zeigt.

2. Methode, Design, Stichprobe

2.1 Design und Stichprobe

Im Rahmen eines längsschnittlichen Designs wurden in halbjährlichen Abständen über vier Messzeitpunkte hinweg die mathematischen Kompetenzen der beteiligten Schüler:innen untersucht. Dabei wurden neben den Regelschulformen auch Förderschulen mit dem Schwerpunkt Lernen einbezogen. Die Schüler:innen wurden von der 5. bis zur 7. Klasse (Kohorte 1, K1) bzw. der 7. bis zur 9. Klasse (Kohorte 2, K2) begleitet. Insgesamt nahmen 1 253 Schüler:innen (n_{K1} = 851, n_{K2} = 402) aus 27 Schulen in ganz Baden-Württemberg teil. Die Schülerschaft verteilte sich wie folgt auf die verschiedenen Schulformen (K1/K2): n = 54/57 Förderschule Lernen, n = 618/239 nicht-gymnasiale Sekundarstufe, d. h. Haupt-, Werkreal-, Real- und Gemeinschaftsschule, n = 179/106 Gymnasium.

Nicht alle Schüler:innen nahmen an allen vier Messzeitpunkten teil. In die nachfolgenden Analysen zu den Entwicklungsverläufen wurden daher ausschließlich diejenigen Schüler:innen einbezogen, für die ein vollständiger längsschnittlicher Datensatz vorlag. Hauptgründe für unvollständige Datensätze waren einerseits der Studienabbruch von drei Klassen bzw. einer Schule mit fünf Klassen zum zweiten Messzeitpunkt (n = 131) und der Ausstieg einer Schule mit vier Klassen zum dritten Messzeitpunkt (n = 76). Die Abbrüche waren hauptsächlich auf Lehrkraftwechsel zurückzuführen, bei denen die neuen Lehrkräfte nicht bereit waren, die Fortführung der Studie zu unterstützen. Ein weiterer wesentlicher Grund für unvollständige Datensätze waren Schul- oder Klassenwechsel von Schüler:innen während der Studiendauer (MZP 2: n = 49, MZP 3: n = 10, MZP 4: n = 59). Fehlende Werte resultier-

ten zudem aus mangelnder Beteiligungsbereitschaft oder Krankheit an den Testtagen (MZP 1: $n = 84$, MZP 2: $n = 57$, MZP 3: $n = 43$, MZP 4: $n = 63$). Gleichzeitig kamen in den teilnehmenden Klassen auch neue Schüler:innen hinzu (MZP 2: $n = 39$, MZP 3: $n = 19$, MZP 4: $n = 16$).

Insgesamt konnten von den 1 253 Studienteilnehmer:innen 684 Schüler:innen mit einem vollständigen Datensatz für die Analyse der Entwicklungsverläufe herangezogen werden. Davon gehörten 471 Schüler:innen (47.1 % Mädchen, 52.9 % Jungen) zur ersten Kohorte ($n = 23$ Förderschule Lernen, $n = 324$ nicht-gymnasiale Sekundarstufe, $n = 124$ gymnasiale Sekundarstufe) und 213 Schüler:innen (54.9 % Mädchen, 45.1 % Jungen) zur zweiten Kohorte ($n = 31$ Förderschule Lernen, $n = 137$ nicht-gymnasiale Sekundarstufe, $n = 45$ gymnasiale Sekundarstufe).

2.2 Erhebungsinstrumente

2.2.1 Mathematische Basiskompetenzen

Zur Erfassung der mathematischen Basiskompetenzen wurde das Kernmodul der Testbatterie mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe (MBK 4–13+; Ennemoser & Krajewski, 2024) eingesetzt. Die MBK 4–13+ ist ein Testverfahren, welches bei Schüler:innen von der 4. bis zur 13. Klasse mathematische Kompetenzen lehrplanunabhängig erfasst. Das Kernmodul besteht aus zwei Kerntests, die zwei zentrale Säulen der mathematischen Kompetenzentwicklung erfassen: das Zahl-Größen-Verständnis (ZGV) und das Konventions- und Regelwissen (KRW) nach Ennemoser et al. (2011). Aus Gründen der Ökonomie wurde der Kerntest ZGV in seiner verfügbaren Kurzform (Ebene 1 + 2) eingesetzt.

2.2.1.1 Zahl-Größen-Verständnis (ZGV)

Der Kerntest ZGV basiert auf dem entwicklungspsychologischen Modell der Zahl-Größen-Verknüpfung (ZGV-Modell) nach Krajewski (2013), welches die Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen als eine zunehmende Verknüpfung von Zahlen mit Mengen und Größen beschreibt. Auf der ersten Entwicklungsebene sind numerische Basisfertigkeiten wie die Unterscheidung nicht-numerischer Größen sowie die Kenntnis von Zahlwortfolge und Zifferndarstellung *(Ebene 1)* verortet, aus denen sich durch die Verknüpfung von Zahlen mit Mengen und Größen zunächst ein einfaches Zahlverständnis *(Ebene 2)* und schließlich ein tiefes Zahlverständnis *(Ebene 3)* entwickelt. In allen bisherigen Studien konnte gezeigt werden, dass bereits die ersten beiden Entwicklungsebenen geeignet sind, substanzielle Unterschiede zwischen Schüler:innen verschiedener Schulformen aufzuzeigen, und zudem sehr zuverlässig die curricularen Mathematikleistungen vorhersagen.

Ebene 1 (max. 26 Punkte): Im Subtest *Zahlendiktat* wurden zehn Zahlwörter diktiert, die in ihre Ziffernschreibweise übersetzt werden sollten. Bis auf eine 13-stellige

Zahl (1 Billion) waren alle Zahlen sechs- bis neunstellig. Beim Subtest *Zahlenfolgen* sollten Vorgänger oder Nachfolger zu 16 vorgegebenen Zahlen im vier- bis siebenstelligen Bereich bestimmt werden (Bearbeitungszeit 90 sec).

Ebene 2 (max. 20 Punkte): Im Subtest *Zahlenstrahlen* waren acht Zahlen vorgegeben, die auf je einem Zahlenstrahl (mit den Begrenzungen 0–100, 0–1 000 oder 0–10 000) korrekt lokalisiert und jeweils mit einem Kreuz markiert werden sollten (Bearbeitungszeit 3 min). Beim Subtest *Zahlvergleiche* erhielten die Schüler:innen 12 Zahlenpaare. Sie sollten durch Einsetzen der Vergleichszeichen >, < oder = angeben, welche Zahl größer oder kleiner ist oder ob beide Zahlen gleich groß sind (90 sec). Die interne Konsistenz (Cronbachs α) der Kurzform schwankte über die Klassenstufen hinweg zwischen .88 und .95 und lag damit durchweg in einem sehr guten Bereich.

2.2.1.2 Konventions- und Regelwissen (KRW)

Der Kerntest KRW erfasst das Verständnis und die Anwendung mathematischer Konventionen und Regeln im Sinne der mathematischen Notation. Der Test besteht aus fünf Subskalen mit jeweils zehn Aufgaben (insgesamt max. 50 Punkte). Die Aufgaben sind so konstruiert, dass sie nur minimale kalkulatorische Anforderungen stellen, um eine Konfundierung mit Rechenfertigkeiten zu vermeiden. So werden mit einstelligen Zahlen Aufgaben zu Punkt-vor-Strich-Regeln vorgegeben, zum Verständnis von Klammerregeln, der Darstellung von Brüchen und Potenzen/Wurzeln sowie Aufgaben zum Verständnis der Dezimaldarstellung. Die Aufgaben der fünf Subskalen werden in wechselnder Abfolge dargeboten (Bearbeitungszeit 3.5 min). Der Kerntest KRW zeigt interne Konsistenzen im Bereich von $\alpha = .84$ bis $\alpha = .96$.

2.2.2 Curriculare Mathematikleistungen

Zusätzlich zu den mathematischen Basiskompetenzen wurden einmal pro Schuljahr auch die curricularen Leistungen im Fach Mathematik erfasst. Hierfür wurde der Deutsche Mathematiktest (DEMAT) in der für die jeweilige Klassenstufe entsprechenden Version verwendet (DEMAT 5+; Götz et al., 2013; DEMAT 6+; Götz et al., 2013; DEMAT 7+; Pirr & Ennemoser, in Vorb.; DEMAT 8+; Pirr & Ennemoser, in Vorb.). Die an den Bildungsplänen der Regelschulen orientierten Verfahren sind für die entsprechenden Klassenstufen an Förderschulen nicht angemessen. Daher wurde hier der DEMAT 3+ eingesetzt (Roick et al., 2018).

2.3 Ablauf der Studie

Im Schuljahr 2021/2022 wurden zu Beginn des zweiten Halbjahres in der 5. und 7. Klasse die mathematischen Basiskompetenzen erhoben. Anschließend wurden die Schüler:innen im halbjährlichen Rhythmus erneut untersucht. Alle Erhebungen fanden im Klassenverband statt. Die mathematischen Basiskompetenzen (Zahl-Größen-Verständnis, ZGV) und das Konventions- und Regelwissen (KRW) wurden jeweils zu Beginn der Testung mithilfe der MBK 4–13+ erfasst. Dabei wurde das Konventions- und Regelwissen bei Schüler:innen an Förderschulen Lernen nicht geprüft, da die damit erfassten Aspekte der mathematischen Notation vom Lehrplan einer Förderschule größtenteils nicht abgedeckt werden. Die curricularen Mathematikleistungen wurden zum zweiten und vierten Messzeitpunkt erhoben.

3. Ergebnisse

3.1 Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen

Leistungsverteilung im Zahl-Größen-Verständnis und Konventions- und Regelwissen für Kohorte 1 und 2. Abbildung 1 und 2 stellen für beide Kohorten die Verteilungen der mathematischen Basiskompetenzen getrennt nach Schulform zum Beginn (1. Messzeitpunkt) und zum Ende des zweijährigen Untersuchungszeitraums (4. Messzeitpunkt) dar. Die Verteilungen im Zahl-Größen-Verständnis zeigen erwartungskonform, dass die Schüler:innen der Förderschule Lernen durchschnittlich die geringsten und Gymnasiast:innen durchschnittlich die höchsten mathematischen Basiskompetenzen verzeichnen. Dennoch ist im Zahl-Größen-Verständnis eine so nicht erwartete deutliche Überlappung zwischen den Schulformen festzustellen. So reichen in Klasse 5 die Leistungen einiger Schüler:innen der Förderschule Lernen sogar an die Leistungen von durchschnittlichen Gymnasiast:innen heran. Dieser Trend nimmt zur 9. Klasse hin noch zu.

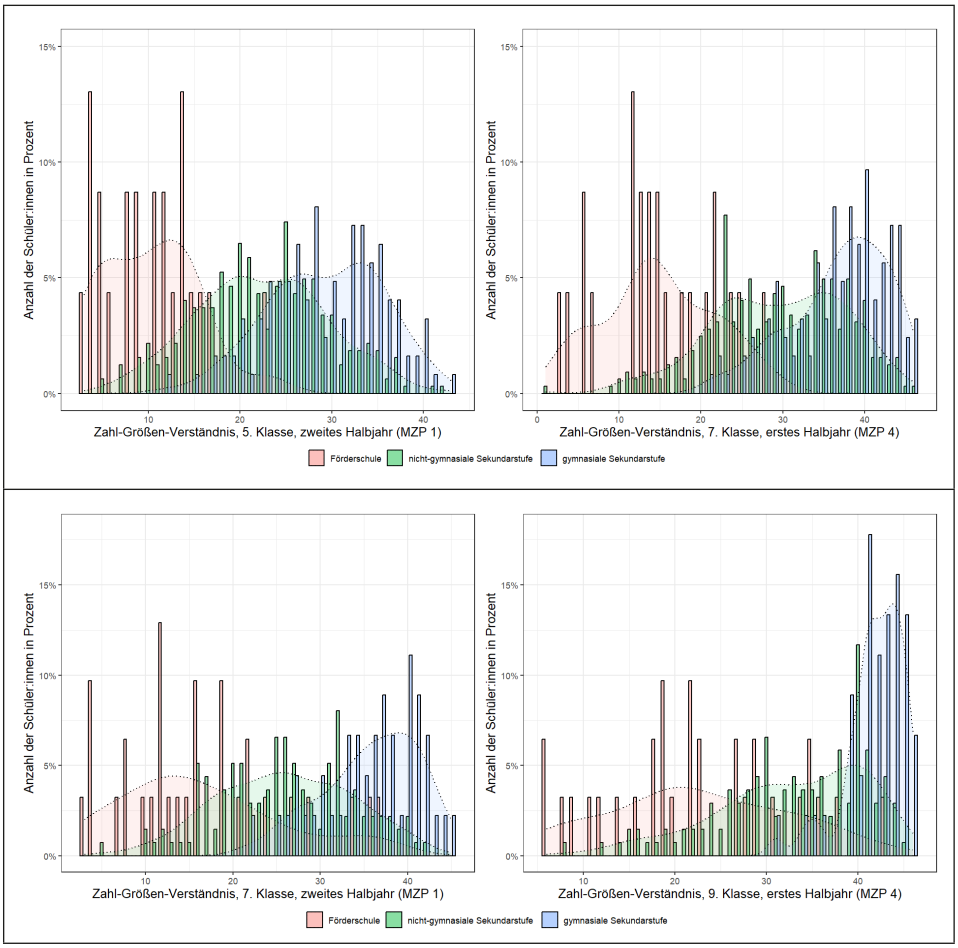

Abbildung 1: Leistungsverteilung im Zahl-Größen-Verständnis, oben: Kohorte 1 in der 5. Klasse (MZP 1, links) und der 7. Klasse (MZP 4, rechts), unten: Kohorte 2 in der 7. Klasse (MZP 1, links) und der 9. Klasse (MZP 4, rechts)

Abbildung 2 veranschaulicht die Leistungsverteilung für das Konventions- und Regelwissen, welches an der Förderschule Lernen nicht erhoben wurde. In beiden Kohorten lässt sich über die zwei Schuljahre hinweg eine zunehmende Diskrepanz zwischen den Leistungen der nicht-gymnasialen und der gymnasialen Sekundarstufe beobachten.

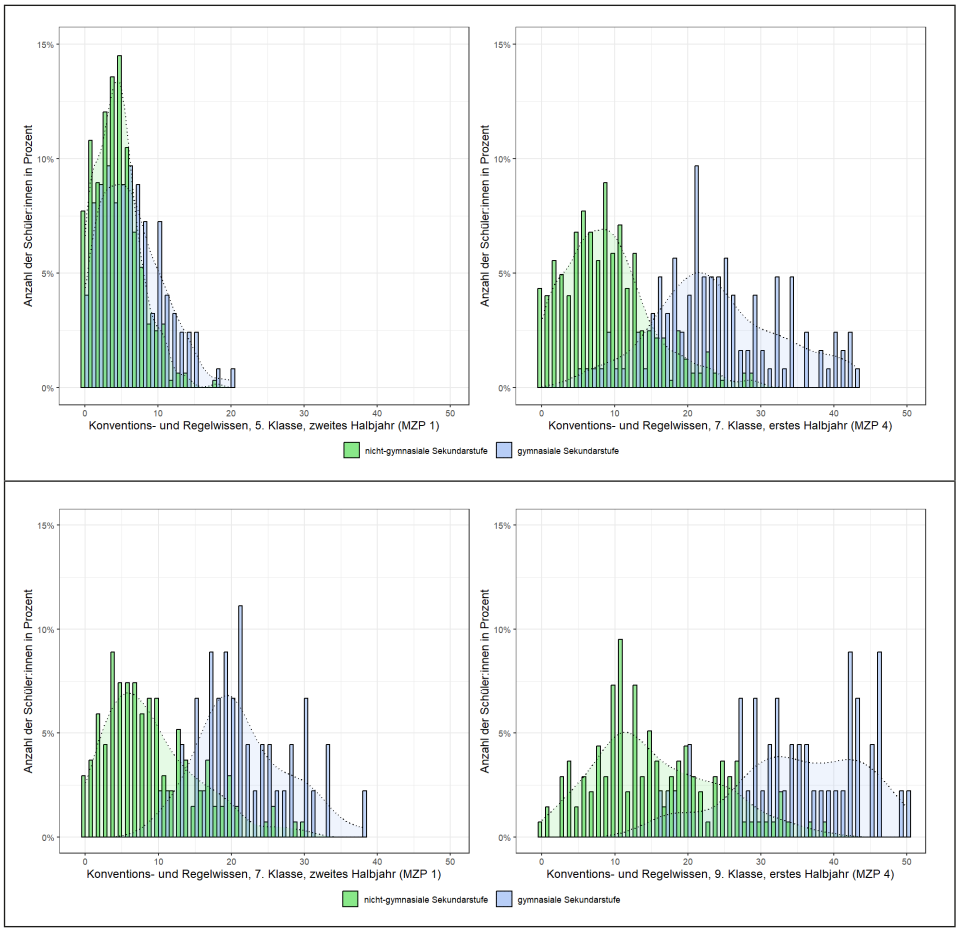

Abbildung 2: Leistungsverteilung im Konventions- und Regelwissen, oben: Kohorte 1 in der 5. Klasse (MZP 1, links) und der 7. Klasse (MZP 4, rechts), unten: Kohorte 2 in der 7. Klasse (MZP 1, links) und der 9. Klasse (MZP 4, rechts)

Entwicklung des Zahl-Größen-Verständnisses. Abbildung 3 und Tabelle 1 zeigen die durchschnittliche Entwicklung des Zahlen-Größen-Verständnisses im Untersuchungsverlauf für beide Kohorten.

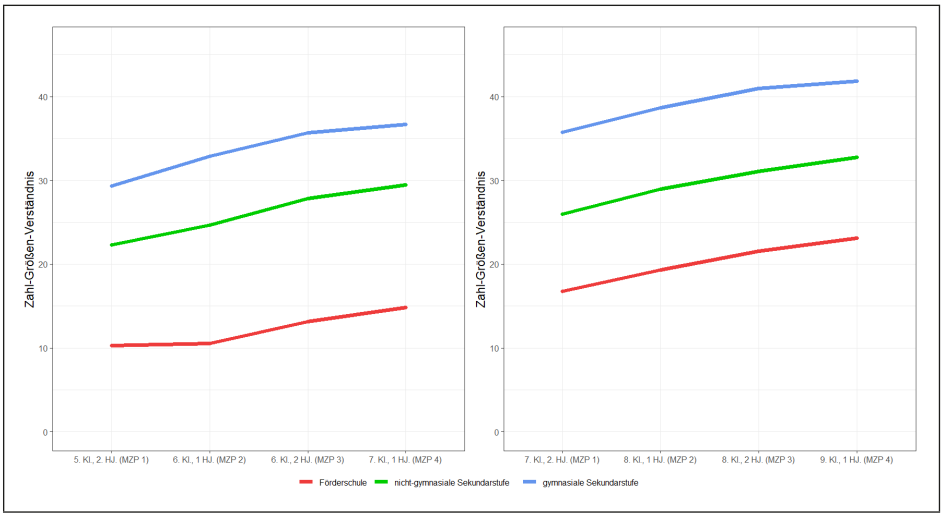

Abbildung 3: Entwicklung des Zahl-Größen-Verständnisses (ZGV) im Untersuchungsverlauf (links: Kohorte 1, rechts: Kohorte 2)

Tabelle 1: Entwicklung des Zahl-Größen-Verständnisses (Ebenen 1 und 2), differenziert nach Kohorte

		Förderschule Lernen		**nicht-gymnasiale Sekundarstufe**		**gymnasiale Sekundarstufe**	
		M	*SD*	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Kohorte 1	5. Kl., 2. HJ (MZP 1)	10.30	5.12	22.30	7.14	29.32	6.25
	6. Kl., 1. HJ (MZP 2)	10.52	6.11	24.66	7.69	32.90	6.54
	6. Kl., 2. HJ (MZP 3)	13.13	6.31	27.83	7.99	35.69	6.49
	7. Kl., 1. HJ (MZP 4)	14.83	6.87	29.46	8.09	36.94	5.97
	Zeit	$F(3,1348) = 116.15; p < 0.01, \eta^2 = 0.19$					
	Schulform	$F(2, 468) = 121.11; p < 0.01, \eta^2 = 0.34$					
	Zeit x Schulform	$F(6,1348) = 2.79; p = 0.01, \eta^2 = 0.01$					
	$d_{MZP1\text{-}MZP4}$	0.98		1.34		1.40	
Kohorte 2	7. Kl., 2. HJ (MZP 1)	16.32	9.11	25.95	7.67	35.76	5.54
	8. Kl., 1. HJ (MZP 2)	18.93	9.12	28.97	8.10	38.69	4.94
	8. Kl., 2. HJ (MZP 3)	21.10	9.16	31.06	8.18	40.96	4.10
	9. Kl., 1. HJ (MZP 4)	22.55	9.49	32.75	8.09	41.87	3.22
	Zeit	$F(3, 606) = 103.00; p < 0.01, \eta^2 = 0.33$					
	Schulform	$F(2, 210) = 71.57; p < 0.01, \eta^2 = 0.41$					
	Zeit x Schulform	$F(6, 606) = 0.24; p = 0.96, \eta^2 = 0.002$					
	$d_{MZP1\text{-}MZP4}$	1.35		1.26		1.30	

Anmerkung: Alle statistisch signifikanten Effekte sind kursiv markiert. Da keine Sphärizität gegeben war, wurden die Ergebnisse nach der Greenhouse-Geisser-Korrektur angepasst.

Für jede Kohorte wurde eine Varianzanalyse mit den Faktoren Schulform und Messzeitpunkt durchgeführt, um die Entwicklung über die Zeit in den verschiedenen Schulformen zu untersuchen. Zunächst wurde für beide Kohorten ein signifikanter Haupteffekt für die Schulform gefunden. Post-hoc-Tests bestätigen, dass sich alle drei Schulformen signifikant voneinander unterscheiden ($p < 0.01$). Auch die Zuwächse über die Zeit waren für beide Kohorten statistisch signifikant, was darauf hindeutet, dass das Zahl-Größen-Verständnis auch zwischen der 5. und 7. bzw. 7. und 9. Klasse noch signifikant ansteigt. Darüber hinaus ergab sich für Kohorte 1 eine signifikante Interaktion zwischen Messzeitpunkt und Schulform, d. h., die Entwicklung der Basiskompetenzen schritt in den Schulformen unterschiedlich schnell voran. So hatten Schüler:innen an Förderschulen im Verlauf der zwei Jahre durchschnittliche Leistungszuwächse um 0.98 Standardabweichungen zu verzeichnen, während die beiden Regelschulformen Zugewinne von 1.34 (nicht-gymnasiale Sekundarstufe) bzw. 1.40 (Gymnasium) Standardabweichungen erreichten. Für Kohorte 2 konnte kein signifikanter Interaktionseffekt gefunden werden, was darauf hindeutet, dass in der 7. Klasse zwar verschiedene Ausgangsniveaus vorlagen, die anschließenden Zugewinne jedoch über alle Schulformen hinweg mit jeweils etwa 1.30 Standardabweichungen vergleichbar waren.

Entwicklung im Konventions- und Regelwissen. Zu Beginn der Sekundarstufe zeigten sich im Bereich des Konventions- und Regelwissens noch eher Bodeneffekte. Wie aus Abbildung 4 und Tabelle 2 hervorgeht, drifteten die Leistungen aber im Verlauf der zwei Schuljahre im Schulformvergleich immer weiter auseinander, sodass sich die Gymnasiast:innen zunehmend deutlich absetzten.

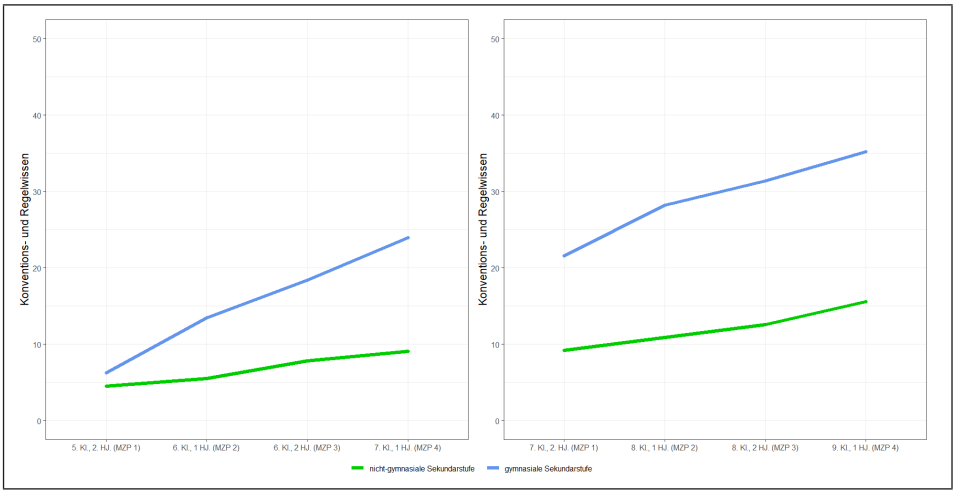

Abbildung 4: Entwicklung des Konventions- und Regelwissens (KRW; links: Kohorte 1, rechts: Kohorte 2)

Tabelle 2: Entwicklung der mathematischen Basiskompetenzen für das Konventions- und Regelwissen, differenziert nach Kohorte

		nicht-gymnasiale Sekundarstufe		**gymnasiale Sekundarstufe**	
		M	*SD*	*M*	*SD*
Kohorte 1	5. Kl., 2. HJ (MZP 1)	4.51	3.06	6.27	4.20
	6. Kl., 1. HJ (MZP 2)	5.53	3.79	13.46	6.18
	6. Kl., 2. HJ (MZP 3)	7.82	4.67	18.40	6.92
	7. Kl., 1. HJ (MZP 4)	9.06	5.95	23.98	8.69
	Zeit	$F(3, 1096) = 781.03; p < 0.01, \eta^2 = 0.64$			
	Schulform	$F(1, 445) = 361.93; p < 0.01, \eta^2 = 0.84$			
	Zeit x Schulform	$F(3, 1096) = 259.17; p < 0.01, \eta^2 = 0.37$			
	$d_{MZP1\text{-}MZP4}$	0.96		2.25	
Kohorte 2	7. Kl., 2. HJ (MZP 1)	9.17	6.40	21.56	6.24
	8. Kl., 1. HJ (MZP 2)	10.88	6.40	28.20	8.12
	8. Kl., 2. HJ (MZP 3)	12.60	7.58	31.38	7.91
	9. Kl., 1. HJ (MZP 4)	15.59	8.45	35.18	8.85
	Zeit	$F(3, 453) = 185.84; p < 0.01, \eta^2 = 0.51$			
	Schulform	$F(1, 178) = 216.41; p < 0.01, \eta^2 = 0.55$			
	Zeit x Schulform	$F(3, 453) = 27.25; p < 0.01, \eta^2 = 0.13$			
	$d_{MZP1\text{-}MZP4}$	1.09		2.08	

Anmerkung: Alle statistisch signifikanten Effekte sind kursiv markiert. Da keine Sphärizität gegeben war, wurden die Ergebnisse nach der Greenhouse-Geisser-Korrektur angepasst.

Der optische Eindruck wird durch die durchgeführte Varianzanalyse bestätigt. Neben den zu erwartenden Haupteffekten für die Schulform und die Zeit ergab sich für beide Kohorten ein signifikanter Interaktionseffekt. Dies deutet darauf hin, dass die Entwicklung des KRW im Verlauf der Sekundarstufe je nach Gruppe unterschiedlich verläuft. Innerhalb von zwei Schuljahren verzeichneten Gymnasiast:innen einen durchschnittlichen Zuwachs von 2.25 (K1) bzw. 2.08 (K2) Standardabweichungen, während die nicht-gymnasiale Sekundarstufe einen deutlich geringeren Zuwachs von 0.96 bzw. 1.09 Standardabweichungen aufwies.

3.2 Zusammenhang der mathematischen Basiskompetenzen mit den curricularen Mathematikleistungen

Tabelle 3 zeigt die korrelativen Beziehungen zwischen den erhobenen Maßen zu den Messzeitpunkten 2 und 4, an denen auch die curricularen Leistungen erhoben wurden. Für die Regelschulformen lagen die Korrelationen zwischen Basiskompetenzen (ZGV und KRW) und zum selben Messzeitpunkt erhobenen curricularen Leistun-

gen (DEMAT) zwischen .63 und .80. Sie betrugen im Mittel[2] .68 (ZGV mit DEMAT) bzw. .76 (KRW mit DEMAT). Die engen Zusammenhänge replizieren frühere Befunde, wonach mathematische Basiskompetenzen substanzielle Zusammenhänge mit den curricularen Mathematikleistungen aufweisen und damit einen validen Indikator für die Leistungen in der Schulmathematik darstellen. Die Korrelationen für die Schüler:innen an Förderschulen mit Schwerpunkt Lernen (zwischen .59 und .71) bestätigen zudem, dass diese Aussage auch auf diese Personengruppe übertragen werden kann.

Tabelle 3: Zeitgleiche (fett gedruckt) und längsschnittliche Korrelation zwischen Zahl-Größen-Verständnis, Konventions- und Regelwissen und curricularen Mathematikleistungen (DEMAT 3+, 5+, 6+, 7+, 8+) für Kohorte 1 (K1) und Kohorte 2 (K2)

	(1)	(2)	(3)	(4) [a]	(5)	(6)
K1: 6. Klasse (MZP 2)						
(1) ZGV	--					
(2) KRW	.61**	--				
(3) DEMAT 5+	**.72****	**.71****	--			
(4) DEMAT 3+ [a]	**.59****	.[b]	.[b]	--		
K1: 7. Klasse (MZP 4)						
(5) ZGV	.84**	.58**	.70**	.66**	–	
(6) KRW	.63**	.83**	.72**	.[b]	.63**	–
(7) DEMAT 6+	.65**	.72**	.77**	.[b]	**.66****	**.80****
(8) DEMAT 3+ [a]	.62**	.[b]	.[b]	.87**	**.71****	.[b]
K2: 8. Klasse (MZP 2)						
(1) ZGV	–					
(2) KRW	.65**	–				
(3) DEMAT 7+	**.63****	**.77****	–			
(4) DEMAT 3+ [a]	**.61****	.[b]	.[b]	–		
K2: 9. Klasse (MZP 4)						
(5) ZGV	.88**	.64**	.64**	.62**	–	
(6) KRW	.64**	.89**	.80**	.[b]	.65**	–
(7) DEMAT 8+	.58**	.76**	.86**	.[b]	**.64****	**.78****
(8) DEMAT 3+ [a]	.65**	.[b]	.[b]	.80**	**.64****	.[b]

Anmerkung: Korrelationen zwischen zeitgleich erhobenen Basiskompetenzen und curricularen Testergebnissen fett gedruckt. ** Die Korrelation ist auf dem Niveau von 0.01 (2-seitig) signifikant. [a] Nur Schüler:innen der Förderschule Lernen. [b] Kann nicht berechnet werden (DEMAT 3+ nur bei Schüler:innen der Förderschule Lernen).

2 Mittelung über Fishers Z-Transformation.

4. Konklusion/Ausblick

Die vorliegende Studie bestätigt nun auch im Längsschnitt, was bisher nur aus querschnittlichen Befunden abgeleitet wurde: Die weit unterhalb der aktuellen Lehrplaninhalte angesiedelten mathematischen Basiskompetenzen entwickeln sich in allen Schulformen noch substanziell weiter und sie bleiben zu jedem Zeitpunkt eng mit den curricularen Leistungen assoziiert, d. h., sie eignen sich diagnostisch als robuster Indikator für die mathematische Kompetenz insgesamt. Das gilt in ähnlicher Weise für die curricular nicht gänzlich unabhängigen Kompetenzen im Konventions- und Regelwissen bzw. die Beherrschung der mathematischen Notation. Die Ergebnisse deuten ferner darauf hin, dass die Befunde auch auf Schüler:innen mit sonderpädagogischem Förderbedarf im Schwerpunkt Lernen übertragbar sind.

Für die Praxis einer förderbezogenen Diagnostik ergeben sich mit dem Fokus auf Basiskompetenzen große Chancen. Die Diagnostik muss sich nicht an curricularen Inhalten orientieren, sondern sie setzt an den Voraussetzungen an, die erforderlich sind, um vom Unterricht überhaupt profitieren zu können. Ein zentraler Vorteil ist, dass mit einem einzigen Verfahren das gesamte Leistungsspektrum der Sekundarstufe abgedeckt werden kann, einschließlich des Leistungsbereichs im Förderschwerpunkt Lernen. Die Diagnostik ist im Hinblick auf Einarbeitungszeit, Durchführung und Auswertung sehr ökonomisch und liefert auch bei einer Anwendung durch reguläre Lehrkräfte valide Ergebnisse. Noch ungeklärt ist hingegen, inwieweit Lehrkräfte in der Praxis auch in der Lage sind, die diagnostischen Informationen für eine gezieltere Förderung im Unterricht zu nutzen.

Ein bemerkenswerter Nebenbefund ist, dass es im Bereich der Basiskompetenzen große Überschneidungsbereiche zwischen den Schulformen gibt. So bringt ein substanzieller Anteil von Schüler:innen der Förderschule Lernen eine unerwartet gute mathematische „Grundausstattung“ mit, die in Teilen bis ins Gymnasialniveau hineinreicht. Unter dem Gesichtspunkt der Inklusion drängt sich die Frage auf, ob diese Schüler:innen an einer Förderschule überhaupt ihren mathematischen Möglichkeiten entsprechend gefördert werden (können). Zumindest der isolierte Blick auf ihre mathematischen Basiskompetenzen legt hier eine inklusive Beschulung nahe, die möglicherweise besser geeignet wäre, um die mutmaßlich vorhandenen Bildungspotenziale im Fach Mathematik auszuschöpfen.

Literatur

Drüke-Noe, C., Möller, G., Pallack, A., Schmidt, S., Schmidt, U., Sommer, N. & Wynands, A. (2011). *Basiskompetenzen Mathematik für den Alltag und Berufseinstieg am Ende der allgemeinen Schulpflicht*. Cornelsen Verlag.

Ennemoser, M., Krajewski, K. & Schmidt, S. (2011). Entwicklung und Bedeutung von Mengen-Zahlen-Kompetenzen und eines basalen Konventions- und Regelwissens in den Klassen 5 bis 9. *Zeitschrift für Entwicklungspsychologie und Pädagogische Psychologie*, *43*(4), 228–242. https://doi.org/10.1026/0049-8637/a000055

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2013). Entwicklungsorientierte Diagnostik mathematischer Basiskompetenzen in den Klassen 5 bis 9. *Diagnostik mathematischer Kompetenzen. Tests & Trends NF*, *11*, 225–240.

Ennemoser, M. & Krajewski, K. (2024). Testbatterie mathematischer Basiskompetenzen für die Sekundarstufe (MBK 4–13+). Unveröffentlichtes Testverfahren.

Gaupp, N., Zoelch, C. & Schumann-Hengsteler, R. (2004). Defizite numerischer Basiskompetenzen bei rechenschwachen Kindern der 3. und 4. Klassenstufe. *Zeitschrift für Pädagogische Psychologie*, *18*, 31–42. https://doi.org/10.1024/1010-0652.18.1.31

Götz, L., Lingel, K. & Schneider, W. (2013). *DEMAT 5+: Deutscher Mathematiktest für fünfte Klassen.* Hogrefe.

Götz, L., Lingel, K. & Schneider, W. (2013). *DEMAT 6+: Deutscher Mathematiktest für sechste Klassen.* Hogrefe.

Moser Opitz, E. (2005). Lernschwierigkeiten Mathematik in Klasse 5 und 8. Eine empirische Untersuchung zu fehlenden mathematischen Basiskompetenzen. *Vierteljahresschrift für Heilpädagogik und ihre Nachbargebiete*, *74*(2), 113–128.

Krajewski, K. (2013). Wie bekommen die Zahlen einen Sinn? Ein entwicklungspsychologisches Modell der zunehmenden Verknüpfung von Zahlen und Größen. In: M. von Aster & J. H. Lorenz (Hrsg.), *Rechenstörungen bei Kindern: Neurowissenschaft, Psychologie*, *Pädagogik* (2. überarb. Auflage; S. 155–179). Vandenhoek & Ruprecht. https://doi.org/10.13109/9783666462580.155

Krajewski, K. (2003). *Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule*. Kovač.

Krajewski, K. & Ennemoser, M. (2010). Entwicklung mathematischer Basiskompetenzen in der Sekundarstufe. *Empirische Pädagogik*, *24*(4), 353–370.

Krajewski, K. & Schneider, W. (2009). Early development of quantity to number-word linkage as a precursor of mathematical school achievement and mathematical difficulties: Findings from a four-year longitudinal study. *Learning and Instruction*, *19*, 513–526. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2008.10.002

Jordan, N. C., Glutting, J., Dyson, N., Hassinger-Das, B. & Irwin, C. (2012). Building kindergartners' number sense: A randomized controlled study. *Journal of Educational Psychology, 104*(3), 647–660. https://doi.org/10.1037/a0029018

Passolunghi, M. C., Vercelloni, B. & Schadee, H. (2007). The precursors of mathematics learning: working memory, phonological ability and numerical competence. *Cognitive Development*, *22*, 165–184. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2006.09.001

Pirr, M. & Ennemoser, M. (in Vorbereitung). *Curricular-valide Diagnostik mathematischer Schulleistungen mit dem Deutschen Mathematiktest für siebte Klassen (DEMAT 7+)*.

Pirr, M. & Ennemoser, M. (in Vorbereitung). *Curricular-valide Diagnostik mathematischer Schulleistungen mit dem Deutschen Mathematiktest für achte Klassen (DEMAT 8+)*.

Roick, T., Gölitz, D. & Hasselhorn, M. (2004). *DEMAT 3+: Deutscher Mathematiktest für dritte Klassen.* Beltz.

Wartha, S. (2009). Rechenstörungen in der Sekundarstufe: Die Bedeutung des Übergangs von der Grundschule zur weiterführenden Schule. In A. Heinze & M. Grüßing (Hrsg.), *Mathematiklernen vom Kindergarten bis zum Studium: Kontinuität und Kohärenz als Herausforderung für den Mathematikunterricht* (S. 157–180). Waxmann.

Watts, T. W., Duncan, G. J., Siegler, R. S. & Davis-Kean, P. E. (2014). What's past is prologue: Relations between early mathematics knowledge and high school achievement. *Educational Researcher*, *43*(7), 352–360. https://doi.org/10.3102/0013189X14553660